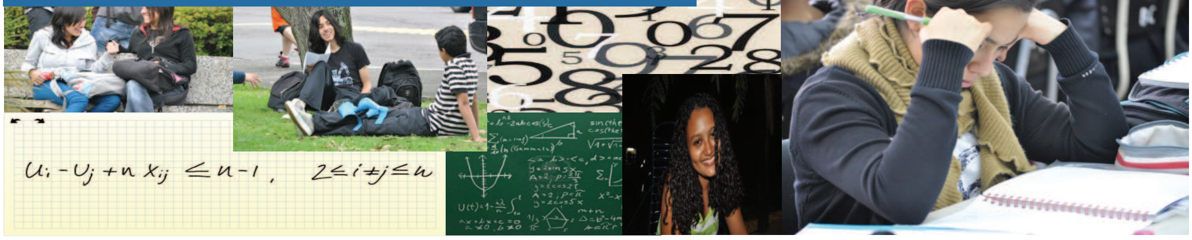
FINANCED BY THE EUROPEAN UNION

CLAVEMAT

Enero 2014

Año 3, Número 5



PRESENTACIÓN

Iniciando el último año del proyecto CLAVEMAT, presentamos a ustedes el ejemplar N° 5 de nuestro boletín, que en esta oportunidad está dedicado a una importante e interesante rama de la matemática, “La Trigonometría”.

El significado etimológico de la palabra Trigonometría, es “la medición de los triángulos”, es decir, que es una serie de procedimientos que permiten poner en relación las medidas de los lados de un triángulo con las medidas de sus ángulos. Precisamente en este número se hace un brevísimo detalle de este origen etimológico, señalando que la palabra Trigonometría proviene del vocablo latino Trigonometria, que tiene tres raíces griegas: tri, gono y metría. La primera significa tres, la segunda, que tiene ángulos y la tercera, proceso de medir. La unión de las dos primeras da lugar al vocablo griego trígonon, que significa triángulo y que en latín se dice trigono. La palabra latina metria junto con trigono, da lugar al vocablo Trigonometria, que puede ser traducida como “la ciencia de medir triángulos”. De esta manera se inicia con un artículo que pretende ser un apoyo para la mejor comprensión conceptual a ser transmitida a los y las estudiantes.

En este mismo sentido, se abordan otros temas como “El Seno como una función” y “La ley de Senos y el seno de una suma”, que está abordado en la sección Didáctica de la Matemática.

En la sección curiosidades se aborda un tema titulado “Aristarco y las distancias del Sol y la luna”, en el cual se explican las suposiciones que Aristarco hizo para calcular las relaciones entre las distancias de la Tierra a la Luna y de la Tierra al Sol, en su obra titulada “Sobre las distancias del Sol y de la Luna”.

Como ya es de conocimiento de nuestros/as lectores/as, el proyecto Clavemat está conformado por una red de cuatro países latinoamericanos y dos europeos; por esta razón, al igual que en los número anteriores, presentamos una sección de noticias en la que presentamos algunas novedades de cómo se lleva adelante el proyecto en cuatro de los países participantes y de los resultados que se van alcanzando con las acciones impulsadas.

Finalmente se encontrará la sección de acertijos para que todos y todas puedan divertirse aprendiendo con las Matemáticas.

¡Disfruten la lectura!

Mayor información del Proyecto:
contacto@clavemat.org
593 2 2507144 Ext. 2233

Comentarios y Sugerencias:
boletin@clavemat.org

Síguenos en:

Página web:
www.clavemat.org

Clavemat Temuco integra una comunidad de aprendizaje de la matemática

Al igual que los demás países socios del proyecto Clavemat, la Universidad Católica de Temuco impulsó, a lo largo del 2013, una serie de cursos de capacitación y talleres con diferentes objetivos específicos, pero con un objetivo prioritario que es el de conformar una comunidad sólida en torno a la enseñanza aprendizaje de la matemática.

Uno de los centros educacionales escogidos para la realización de un total de nueve talleres que se realizaron entre el 31 de mayo y el 3 de julio de 2013, fue el Complejo Educacional La Frontera, localizado en la Comuna de Temuco. El objetivo de estos talleres, fue dar seguimiento al curso CmatPuente, curso en línea de preparación y nivelación a estudiantes en transición del colegio a la universidad, que está implementado sobre la plataforma Moodle. En estos talleres se orientó las interacciones de los estudiantes con la plataforma y se pudo observar sus destrezas, habilidades y falencias frente a los contenidos y tareas planteadas en el marco del curso; además se obtuvo información con respecto a las facilidades y dificultades que podría presentar la plataforma Moodle para este tipo de cursos, la pertinencia o no de la metodología empleada, así como identificar ciertos imprevistos que no habían sido considerados.

Sobre la base de las observaciones, se elaboró un informe que permitirá implementar un Curso Puente totalmente depurado, y de efectiva ayuda para los y las estudiantes que desean acceder a la universidad, en todos los países participantes del proyecto Clavemat.

Otro de los talleres realizados a lo largo y que tuvo una importancia particular, fue el denominado "Taller de Ciclos Experienciales. Una propuesta didáctica para fortalecer competencias básicas en matemáticas", que tuvo como objetivo vivenciar el aprendizaje de las matemáticas a partir de situaciones contextualizadas y concretas a través de la incorporación de ciclos experienciales en las prácticas docentes, las cuales partiendo de una realidad concreta o situación real y cercana al estudiante, potencian aprendizajes significativos que fortalecen competencias básicas en matemáticas. Este taller estuvo dirigido exclusivamente a docentes de matemáticas que imparten clases en centros de Educación Media.

Adicionalmente se realizaron otros talleres a lo largo del 2013, que tuvieron como objetivo dar a conocer el proyecto Clavemat, sus principales acciones y de esta manera integrar tanto a estudiantes como a docentes a la comunidad virtual de enseñanza aprendizaje de la matemática. En promedio, participaron un total de 288 personas entre estudiantes y docentes.

Clavemat en la Universidad Nacional de Colombia: Dando pasos para la consolidación de la Red de tutorías Colombia

Con la meta de extender el programa de tutorías al interior de la UNAL, el equipo de trabajo de CLAVEMAT ha logrado establecer alianzas con la Dirección Académica y con la Dirección de Bienestar de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, para aunar esfuerzos en pos de un objetivo en común: facilitar y apoyar la finalización exitosa de los estudios en matemáticas, ciencias e ingeniería de la universidad. Como resultado de esta alianza se ha logrado que los estudiantes de la universidad cuenten con disponibilidad durante toda la jornada diaria de estudios para acceder al acompañamiento de un tutor, garantizando la mayor cantidad de oportunidades para beneficiarse del sistema de tutorías de la Universidad Nacional. Así mismo esta cooperación ha posibilitado recabar información fundamental para el proyecto, con miras a la orientación de acciones, diseño de materiales y estrategias para suplir necesidades de formación y acompañamiento académico, que aportará a todos los beneficiarios de CLAVEMAT. En vista de la acogida que han tenido las tutorías y el impacto positivo que ha generado en los estudiantes, surgió la propuesta de replicar esta experiencia en otras universidades, de allí nace la idea de la Red de tutorías Colombia, una iniciativa que busca vincular otras universidades al sistema de tutorías de CLAVEMAT. En este sentido, hasta el momento se han logrado grandes avances con la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de la ciudad de Bogotá, y se han adelantado gestiones con las Universidades del Tolima de la ciudad de Ibagué y Pedagógica y Tecnológica de Colombia de la ciudad de Tunja. Con estas y otras gestiones de cooperación, se espera que en el 2014 sea posible avanzar en la formación de los tutores y posterior implementación del sistema de tutorías por universidad. Si está interesado en obtener más información acerca de cómo ser parte de la red de tutorías o beneficiarse de las mismas puede comunicarse con el equipo de trabajo de la Universidad Nacional a través del correo electrónico `clavemat_fcbog@unal.edu.co` o contactarnos en nuestra comunidad virtual CLAVEMAT dejándonos un mensaje en el grupo acciones locales UNAL

Vivencias del Congreso CITICED CREAD-Caribe Santo Domingo, 2013

Entre el 8 y 11 de octubre de 2013, en la ciudad de Santo Domingo - República Dominicana, se desarrolló la novena edición del Congreso Internacional CITICED CREAD Caribe. En el evento, que tuvo como sede a la Universidad Nacional Pedro Henríquez Ureña, se abordaron temas como: Generaciones, Género y TIC; Realidades y Tendencias de la Educación a Distancia (EAD); Herramientas Emergentes en la Producción de Materiales Didácticos Digitales; Estándares en la Implementación de las TIC para Educación a Distancia y la Legislación para la EAD en Iberoamérica.

En este evento internacional, el equipo de CLAVEMAT de la Universidad de Granma participó con una ponencia sobre la .ENSEÑANZA VIRTUAL DE LAS MATEMÁTICAS: RESULTADOS Y EXPERIENCIAS", trabajo realizado por un grupo de investigadores que forman parte de este proyecto.

En resumen, la ponencia presentó la experiencia en la enseñanza virtual de las Matemáticas que lleva adelante el proyecto CLAVEMAT, capacitando a profesores de bachillerato y de las carreras ingenieriles a través de la reflexión e intercambio de ideas y conocimientos sobre la enseñanza de esta ciencia; brindando, además, tutoría a estudiantes, tanto presenciales, como a través del uso de diversas herramientas tecnológicas y plataformas de teleformación, lo cual permitió mostrar la eficiencia de este tipo formación en línea, en el marco del Congreso. El trabajo tuvo un alto impacto entre los participantes y los debates que se efectuaron fueron positivos.

Como conclusión de la ponencia presentada, los investigadores del proyecto plantearon que el uso de las plataformas de teleformación y las herramientas de la Web 2.0 para la enseñanza virtual de las Matemáticas y la capacitación a profesores de esta ciencia a nivel de bachillerato y el primer año de las carreras de Ingenierías, ha constituido una excelente experiencia tanto para los estudiantes como para los profesores de los países participantes del proyecto CLAVEMAT, Clase Virtual de Matemática y Tutoría.

Clavemat EPN mantuvo reunión con representantes de la Universidad de Cuenca para establecer líneas de cooperación

En el marco de las actividades de cooperación y visibilidad, el equipo de Clavemat EPN mantuvo una reunión, en la Universidad de Cuenca, el pasado 13 de noviembre, con el Director de la Carrera de Matemática, Fabián Bravo; la Delegada de la Decana de la Facultad de Filosofía, Neli Gonzáles; y, la Coordinadora de Nivelación, Lourdes Illescas.

El objetivo de la reunión fue, además de presentar el proyecto Clavemat, plantear la realización de una serie de actividades conjuntas encaminadas a delinear espacios de reflexión, análisis e investigación de una temática poco o nada abordada en el Ecuador: Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática.

A nivel latinoamericano, existe una importante línea investigativa sobre este tema desde diversas corrientes teóricas, sin embargo, en el Ecuador este es un campo poco explorado, pero muy necesario si se quiere pensar en contar con estudiantes bien formados, capaces de responder a las necesidades y exigencias de la Universidad y a la generación de investigación aplicada de los conocimientos.

En este sentido se acordó la organización conjunta de una primera mesa de diálogo, que se llevará a cabo entre enero o febrero del próximo año, y en la que se espera la participación de diversos actores de organismos gubernamentales, no gubernamentales, instituciones de educación superior, organizaciones de la sociedad civil, docentes, investigadores, entre otros, que estén vinculados con el tema de la educación en el Ecuador.

Con la realización de este espacio, y de la reflexión que allí se genere, se espera que surjan importantes temas a ser analizados más profundamente en eventos posteriores que se realizarían a lo largo del 2014 y que permitirían emprender en la delimitación de investigaciones concretas y necesarios para contar con nuevas miradas sobre los procesos educativos e incidir en la adopción de políticas educativas en cada uno de los países participantes del proyecto Clavemat.

Trigonometría: de las cuerdas a los triángulos

"¿Por qué la función inversa del *seno* se denomina *arco seno*?" Esta pregunta suele ser formulada frecuentemente por los y las estudiantes. Lamentablemente, muchas veces las y los maestra/os no pueden ofrecer una respuesta satisfactoria, y de esta manera, se pierde una oportunidad valiosa de lograr la comprensión de un concepto por parte de los estudiantes, pues, los nombres de los objetos matemáticos son más que nombres, contienen en sí mismos los significados de esos conceptos.

La historia de la matemática nos ofrece los elementos necesarios para explicar una buena parte del significado de los nombres de los objetos matemáticos. Para el caso de la pregunta con que iniciamos esta sección, debemos remontarnos a los orígenes de la Trigonometría, allá por el siglo tercero antes de Cristo.

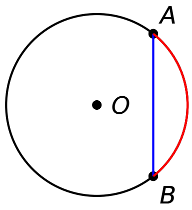
El vocablo *Trigonometria*fue utilizado por primera vez en 1595 como el título de un libro publicado por el matemático polaco Bartholomeo Pitiscus (1561–1613); sin embargo, el origen de los contenidos de este trabajo se remontan mucho tiempo atrás: aproximadamente 300 años antes de Cristo, en la antigua Grecia, en la que nació y vivió Aristarco, el astrónomo que presentó la primera teoría sobre el movimiento de los planetas claramente centrada en el Sol*.

Aristarco escribió un libro titulado "*Sobre las distancias del Sol y de la Luna*", en el que calcula las relaciones entre las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Aunque todavía no se utiliza la Trigonometría como la conocemos actualmente, en el método están presentes los primeros elementos de este campo de la matemática. El problema tratado por Aristarco es un claro ejemplo de aquellos problemas que son resueltos por la Trigonometría: el cálculo de distancias entre objetos que son inaccesibles.

Se puede decir que el creador de la Trigonometría fue el astrónomo y matemático griego Hiparco (190 - 120). En su *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990), Toomer dice:

> ... es altamente probable que Hiparco fuera el primero en construir una tabla de cuerdas y de este modo proveyó una solución general para los problemas trigonométricos. Un corolario de esto es que antes de Hiparco no existían tablas astronómicas basadas en los métodos de la geometría griega. Si así es, Hiparco no solamente fue el fundador de la Trigonometría, sino también fue quien transformó la astronomía griega de una ciencia puramente teórica en una ciencia práctica predictiva.

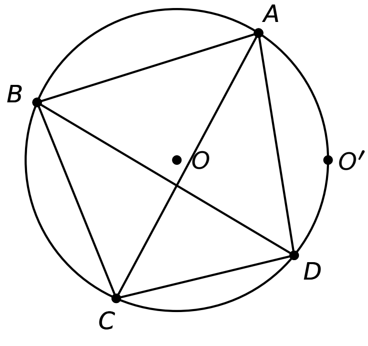
Pero ¿qué tienen que ver las *cuerdas* con la Trigonometría? En su inicio, la Trigonometría no trataba directamente con los ángulos de un triángulo, sino con la cuerda en un círculo. En efecto, dado un círculo cuyo radio es conocidoy el arco de circunferencia $\overset{\frown}{AB}$:



Hiparco calcula la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ a partir de la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$, cálculo que Hiparco utilizó para determinar con precisión el aparecer y el ocaso de varias estrellas; para ello, utilizó una tabla de cuerdas que él mismo calculó. Esta tabla de cuerdas es, en términos contemporáneos, una tabla de senos, como veremos más adelante.

Más tarde, un par de siglos después de Hiparco, el astrónomo y matemático de Alejandría, Tolomeo (85-165), escribió una obra titulada *Almagesto*, compuesto por 13 libros que, fundamentalmente, contienen una teoría matemática del movimiento de la Luna, el Sol y los planetas; su teoría es geocéntrica, y su influencia prevalecerá aproximadamente 1 400 años.

En los capítulos 10 y 11 del primer libro del *Almagesto*, Tolomeo desarrolla la matemática necesaria (Trigonometría) y termina, en el capítulo 11, con una tabla de cuerdas para arcos (ángulos) desde medio grado y en intervalos de medio grado. Uno de los teoremas de la geometría fundamentales en el trabajo de Ptolomeo es el siguiente: *en un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos*; es decir:



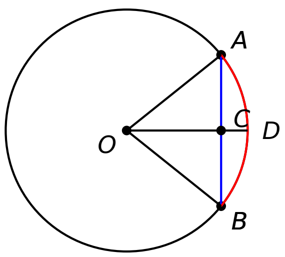
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Para el cálculo de las cuerdas que subtienden los ángulos de 36, 72, 60, 90 y 120 grados, inscribió polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 10 lados, respectivamente.

*La Trigonometría nació y se originó como una herramienta para la Astronomía. No fue sino hasta el Renacimiento en que se la utilizó para la Cartografía y la Topografía también.

Matemática en todas partes

Los siguientes contribuyentes al desarrollo de la Trigonometría fueron los hindúes. En el siglo VI, el matemático hindú Aryabhata modificó ligeramente el problema de Hiparco: dado un círculo con radio conocido y el arco $\overset{\frown}{AB}$, unamos los puntos A y B con el centro O mediante segmentos, y tracemos el radio que pasa por el punto medio C de la cuerda $\overline{AB}$

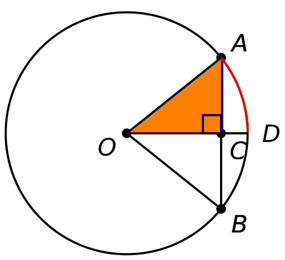


El arco $\overset{\frown}{AB}$ también queda dividido en dos partes iguales. Aryabhata propone calcular la longitud de la semicuerda $\overline{AC}$, en lugar de toda la cuerda $\overline{AB}$, asociada al semiarco $\overset{\frown}{AD}$, y ya no a todo el arco $\overset{\frown}{AB}$. También elaboró tablas para el cálculo de esta semicuerda.

Los hindúes llamaron a esta semicuerda *jya* del arco $\overset{\frown}{AD}$, y esta palabra se convirtió en *jaib* para los árabes, la misma que pasó a ser *sinus* en Europa, que significa *sinuoso* o *que tiene curvas o vueltas*. Es decir, el *sinus* del arco $\overset{\frown}{AD}$ es la longitud de la semicuerda $\overline{AC}$:

$$\text{sinus } \overset{\frown}{AD} = AC.$$

En Europa también se elaboraron tablas de alta precisión para calcular el *sinus* de un arco de circunferencia. En 1542, el austriáco Rhaeticus (1514–1574) publicó los capítulos del libro de Copérnico que contenían la trigonometría relevante para la astronomía. Pero Rhaeticus hizo una contribución mayor: introdujo la que en la actualidad es la definición usual del seno de un ángulo en un triángulo rectángulo, expresando la definición original de *sinus* de la manera siguiente. En el dibujo

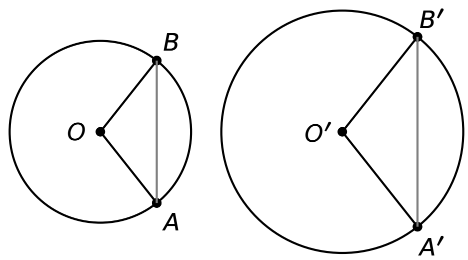


puedes observar que hay dos triángulos: $\triangle AOC$ y $\triangle BOC$. Son congruentes porque tienen los tres lados congruentes respectivamente:

1. $OA = OB$, porque son radios de la circunferencia,
2. $OC = OC$, y
3. $AC = BC$, pues C es el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$.

Por la congruencia de los triángulos, podemos concluir que los ángulos $\angle OCA$ y $\angle OCB$ son congruentes y, por tanto, son ángulos rectos.

Por otro lado, se tiene que para ángulos centrales iguales en circunferencias diferentes, las correspondientes cuerdas, arcos y radios son proporcionales:



Si los ángulos $\angle AOB$ y $\angle A'O'B'$ son congruentes, es decir, tienen la misma medida, entonces:

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}.$$

Esto significa que si uno de los radios se toma como la unidad, por ejemplo, $OA = 1$, entonces

$$\frac{1}{O'A'} = \frac{AB}{A'B'},$$

de donde se deduce que

$$A'B' = \frac{AB}{O'A'},$$

y en la misma relación estarán las semicuerdas correspondientes.

Entonces Rhaeticus define ahora el *sinus* del ángulo $\angle AOC$, en lugar del arco $\overset{\frown}{AD}$, como el cociente entre la semicuerda y el radio de la circunferencia

$$\text{sinus } \angle AOC = \frac{AC}{OA}.$$

De este modo, el *sinus* del ángulo del triángulo rectángulo no depende de la circunferencia en la que esté, solamente depende del ángulo. Y como el radio de la circunferencia es la hipotenusa del triángulo rectángulo, el *sinus* de un ángulo de un triángulo rectángulo es *el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud de la hipotenusa*:

$$\text{sen}\,\angle AOC = \frac{AC}{OA}.$$

Es así como se pasó de la definición del seno de un arco al seno de un ángulo en un triángulo rectángulo.

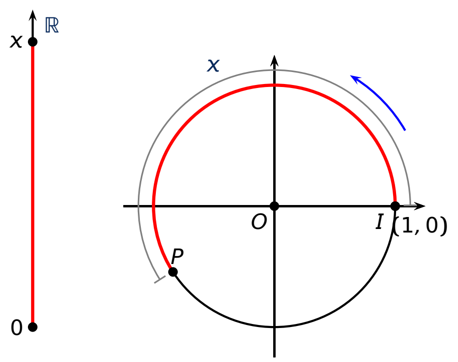
Volviendo a la pregunta inicial, en la definición original, el proceso inverso de obtener el sinus de un arco es obtener el arco a partir de la semicuerda (o cuerda en el caso de Hiparco o Ptolomeo). Así, en la definición de Hiparco, tendríamos que el *arco* de la cuerda $\overline{AB}$ es el arco $\overset{\frown}{AB}$, precisamente, y es de aquí que se deriva el nombre de la función inversa del seno, *arco seno*, y que suele ser representada por arc sen.

El *seno* como una función

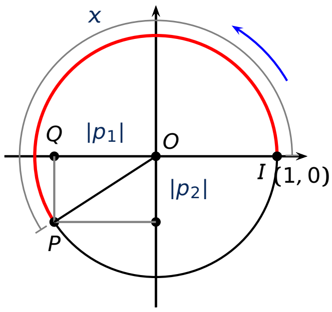
En los currículos de matemática de la secundaria, el estudio de la Trigonometría inicia con las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Luego se amplían las definiciones de estas razones a ángulos en un sistema de coordenadas. Finalmente, se pasan de las razones a las funciones trigonométricas, cuyos dominios son subconjuntos de números reales y no subconjuntos de ángulos. Por ejemplo, la función *seno* es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y, cuando escribimos $\operatorname{sen} x$, x es un número real y no es pensado como un ángulo. Frecuentemente, en la secundaria se suele omitir la definición de la función *seno*, lo que impide que las y los estudiantes lleguen a distinguir las razones trigonométricas de las funciones trigonométricas.

En esta sección, presentamos la definición de $\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la misma que podría ser utilizada en el aula de clase.

En primer lugar, supongamos que x es un número real positivo; es decir, que supongamos que $x > 0$. Ahora consideremos un sistema de coordenadas y en él una circunferencia centrada en el origen y de radio una unidad. En la circunferencia, vamos a "localizar" un punto de la siguiente manera. Desde el punto I de coordenadas $(1, 0)$, recorremos la circunferencia, en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, una distancia igual a x; el punto donde nos "detengamos" es el punto buscado. Nombremos este punto con la letra P:



Nombremos con p_1 y p_2 la abscisa y la ordenada del punto P, respectivamente; es decir, $|p_1|$ y $|p_2|$ son las distancias de P a los ejes vertical y horizontal, respectivamente:



En el triángulo rectángulo $\triangle OPQ$, como la longitud de la hipotenusa $\overline{OP}$ es igual a 1, tenemos que

$$\operatorname{sen} \angle OPQ = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} = PQ;$$

es decir:

$$\operatorname{sen} \angle OPQ = |p_2|,$$

que es la longitud del cateto $\overline{PQ}$. Pero este número es el seno del ángulo en el triángulo. Utilizamos, entonces, el número p_2 (sin el valor absoluto) para definir el *seno* del número x:

$$\operatorname{sen} x = p_2.$$

Ya sabemos que, si eligiéramos un círculo con un radio diferente a 1, simplemente tendríamos que dividir la ordenada para la longitud del radio, y así obtendríamos el mismo número. De esta manera, nos aseguramos de que asignamos un valor único al seno de x.

Si x fuera un número negativo, es decir, si $x < 0$, procederíamos de una manera similar, salvo que, en lugar de recorrer la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, ahora lo haríamos en el mismo sentido que el recorrido de las manecillas.

Podemos, entonces, definir $\operatorname{sen} x$ para todo número real x como *la ordenada del punto* obtenido en una circunferencia centrada en el origen y de radio 1, al recorrer ésta desde el punto I una distancia x (en sentido contrario a las manecillas si $x > 0$, y en el mismo sentido, si $x < 0$).

Una vez establecido esto, las otras funciones trigonométricas de x se definen fácilmente: el *coseno* de x es igual a la abscisa p_1. La *tangente*, como el cociente del seno y coseno (para aquellos x en los que el coseno no sea igual a 0).

Con este método se obtienen de una manera sencilla la mayoría de las propiedades de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, si R es un punto de coordenadas (a, b) que está en la circunferencia, entonces se satisface la igualdad

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Luego, las coordenadas del punto P también satisfarán esta igualdad:

$$p_1^2 + p_2^2 = 1.$$

Luego, tendremos que

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

También las relaciones entre seno y coseno, la periodicidad y otras, se obtendrán de una manera natural y sencilla a partir de esta definición.

La ley de senos y el seno de una suma

¿Se deben realizar demostraciones a nivel de la enseñanza de la matemática en la secundaria? En los diversos talleres que el proyecto Clavemat realiza con profesores de secudaria, hemos encontrado opiniones opuestas al respecto. Aquellos que sostienen que no, utilizan como argumentos a su favor el hecho de que hay muchos contenidos que se deben trabajar en los cursos, que las demostraciones son complejas y abstractas y que hacerlo no es práctico**. Pensamos que, al omitir las demostraciones se pierde la posibilidad de que los estudiantes aprendan el método de la Matemática. Realizar algunas demostraciones permitirá poder aclarar y consolidar mejor los conceptos, mostrando la interdependencia entre ellos. No es necesario hacer todas las demostraciones, ni seguir patrones totalmente formales.

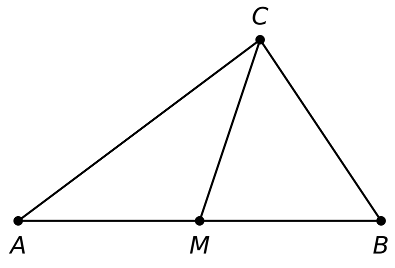
Alfred S. Posamemtier y Herbert Hauptman en su libro "*101 + Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics*" proponen demostraciones sencillas y alternativas para algunas de las propiedades fundamentales en la Trigonometría. Veamos una de ellas para demostrar la ley de senos.

Si ya se conoce o se ha deducido que el área de un triángulo $\triangle ABC$ se puede calcular mediante la siguiente fórmula

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CB \cdot \operatorname{sen} \angle B,$$

entonces la ley de senos se puede deducir de la siguiente manera sencilla.

En el dibujo:



el punto M es el punto medio del lado $\overline{AB}$. Al aplicar la fórmula para el área de un triángulo indicada arriba, tenemos:

$$\text{área } \triangle CAM = \frac{1}{2} AC \cdot MA \cdot \operatorname{sen} \angle A$$

y

$$\text{área } \triangle CBM = \frac{1}{2} BC \cdot MB \cdot \operatorname{sen} \angle B,$$

de donde obtenemos

$$MA = \frac{\text{área } \triangle CAM}{AC \cdot \operatorname{sen} \angle A}$$

y

$$MB = \frac{\text{área } \triangle CBM}{BC \cdot \operatorname{sen} \angle B}.$$

Pero, como M es el punto medio del lado $\overline{AB}$, y los triángulos $\triangle CAM$ y $\triangle CBM$ tienen la misma altura respecto del vértice C, tenemos que

$$MA = MB \quad \text{y} \quad \text{área } \triangle CAM = \text{área } \triangle CBM,$$

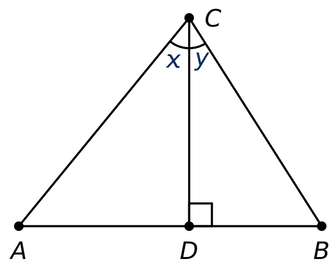
de donde obtenemos la igualdad

$$AC \cdot \operatorname{sen} \angle A = BC \cdot \operatorname{sen} \angle B,$$

que no es más que la ley de senos:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} \angle B} = \frac{BC}{\operatorname{sen} \angle A}.$$

Otra deducción que puede ser trabajada con sencillez es la correspondiente al seno de una suma. Si x y y representan las medidas de dos ángulos agudos, se puede obtener de una manera sencilla la fórmula del seno de $x+y$. Sobre la base del dibujo siguiente:



En primer lugar, tenemos

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \operatorname{sen}(x+y).$$

En segundo lugar:

$$\begin{aligned} \text{área } \triangle ABC &= \text{área } \triangle ABD + \text{área } \triangle CBD \\ &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \operatorname{sen}(x+y) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \operatorname{sen} y,$$

de donde

$$\operatorname{sen}(x+y) = \frac{CD}{BC} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{CD}{AC} \cdot \operatorname{sen} y.$$

Pero

$$\cos y = \frac{CD}{BC} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{CD}{AC}.$$

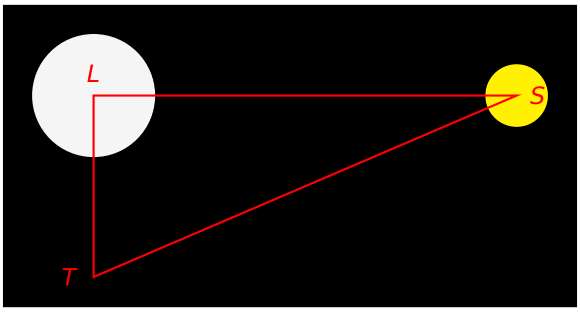
Entonces

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x.$$

**Sobre "teoría y práctica" revisar el Boletín Clavemat No. 4.

Aristarco y las distancias de la Luna y el Sol

Como se mencionó en el artículo *Trigonometría: de las cuerdas a los triángulos*, Aristarco calculó en su obra *Sobre las distancias del Sol y de la Luna*, las relaciones entre las distancias de la Tierra a la Luna y de la Tierra al Sol. Entre las suposiciones que Aristarco hizo para este cálculo, tenemos que la Luna obtiene su luz del Sol, que cuando vemos iluminada la mitad de la luna, que el ojo del observador está sobre el círculo mayor que divide las regiones iluminadas de las obscuras, y que el ángulo Luna–Tierra–Sol es de 87 grados. Estas suposiciones pueden ser representadas a través del siguiente dibujo:



Para poder hacer la representación, el dibujo no está a escala.

En términos actuales, la relación entre las distancias de la Tierra a la Luna y del Sol a la Luna se establece a través del cociente

$$\frac{TL}{SL},$$

que no es más que la tangente del ángulo $\angle LTS$, que para Aristarco mide 87 grados:

$$\frac{TL}{SL} = \tan 87° \approx 19{,}1.$$

El valor obtenido por Aristarco no es correcto, ya que ahora sabemos que el ángulo $\angle LTS$ mide, en realidad, 89,8°. El valor del trabajo de Aristarco, sin embargo, fue poder introducir los métodos de la matemática en la Astronomía. Y, aunque el valor obtenido por el astrónomo griego no es el correcto, su método sí.

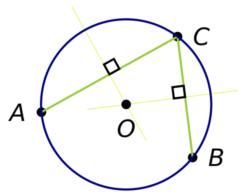
¿Cómo lograr que cooperen?

En el número anterior del boletín de CLAVEMAT se planteó el siguiente acertijo:

> Un padre tiene 2 hijas y 2 hijos. Antes de morir, esconde una moneda a fin de que al menos tres de ellas/os cooperen entre sí para encontrarla. Los que la encuentren se llevarán la herencia del padre.

¡Conoce la historia completa y una solución al acertijo!

Preocupado por cómo podría hacer para que efectivamente sus hijos e hijas logren trabajar juntos, ser un equipo y una verdadera familia, el padre no dejaba de pensar noche y día en cómo poder hacerlo. De pronto lo asaltó un recuerdo... ¡ya está, esa es la solución! Lo que el padre recordó fue el Teorema de Euclides el cual afirma que tres puntos determinan de manera única una circunferencia.



A la mañana siguiente, el padre llamó a sus hijos ante él y le entregó a cada uno de ellos la coordenada de un punto.

—Para encontrar la moneda, al menos tres de ustedes deberán colaborar entre sí—, fue la única instrucción del padre.

La moneda está en el centro y los puntos dados, en la circunferencia.

Problemas

No. 1: Demuestre que

$$\operatorname{arc\,sen}[\cos(\operatorname{arc\,sen} x)] + \arccos[\operatorname{sen}(\arccos x)]$$

es constante.

No. 2: ¿Cuál es el valor de

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx?$$

No. 3: ¿Quién es más grande: $\cos(\operatorname{sen} x)$ o $\operatorname{sen}(\cos x)$?

¿Quieres descubrir las respuestas?
¿Te interesan más artículos, juegos, adivinanzas y acertijos para compartir con tus amigos y amigas?

Regístrate en la plataforma
`clasevirtual.clavemat.org`
y comienza a formar parte de la comunidad de CLAVEMAT